

طراحی یک شبکه عصبی برای تخمین پارامترهای توزیع سه پارامتری وایبل

بابک عباسی

دانشکده مهندسی صنایع - دانشگاه صنعتی شریف

Abbasi@Sharif.edu

بهروز افشار نجفی

دانشکده مهندسی صنایع و مکانیک - دانشگاه آزاد قزوین

عده دار مکاتبات، Afsharnb@Mehr.Sharif.edu

چکیده

توزیع وایبل سه پارامتری یکی از توزیع های مهم در تحلیل های آماری و قابلیت اطمینان است. پیچیدگی تخمین پارامترهای توزیع سه پارامتری وایبل یکی از مباحثی است که محققین در استفاده از این مدل با آن مواجه هستند بهمین دلیل در بسیاری از موارد بمنظور ساده سازی یکی از پارامترهای مدل حذف می شود و مدل دو پارامتری در نظر گرفته می شود. در تخمین پارامترهای وایبل سه پارامتری، استفاده از روشهای متداول تخمین پارامترها مانند روش گشتاورها و روش حداکثر درستنمایی به راحتی امکانپذیر نیست و در این روشها در نهایت مجبور به حل سه معادله غیر خطی پیچیده هستیم. در این تحقیق با استفاده از توانایی های شبکه های عصبی مصنوعی، یک شبکه عصبی پرسپترون برای تخمین همزمان پارامترهای توزیع وایبل سه پارامتری طراحی می شود. شبکه طراحی شده قادر است برای هر نمونه ای بر اساس میانگین، واریانس، میانه، چولگی و تیزی سه پارامتر توزیع وایبل را تخمین بزند. ارزیابی شبکه طراحی شده برای مقادیر مختلف پارامترها به روش مونت کارلو انجام می شود.

کلمات کلیدی: توزیع وایبل سه پارامتری، شبکه های عصبی مصنوعی، تخمین پارامترها.

۱- مقدمه

توزیع وایبل سه پارامتری دارای اشکال مختلفی است و بهمین دلیل بسیاری از توزیعها حالتی خاصی از توزیع وایبل سه پارامتری می باشند [1]. بدلیل شکلهای مختلفی که توزیع وایبل سه پارامتری دارد این توزیع کاربردهای زیادی در تخمین توابع پیچیده خرابی در مباحث قابلیت اطمینان پیدا کرده است. تابع احتمال توزیع وایبل سه پارامتری با پارامترهای β, γ, η بصورت ذیل تعریف می شود [2]:

$$f(x) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{x-\gamma}{\eta} \right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x-\gamma}{\eta}\right)^\beta} \quad (1)$$

$;\beta, \eta > 0, \gamma \geq 0, x > \gamma$

تابع تجمعی توزیع وایبل نیز در رابطه (۲) تعریف شده است:

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x-\gamma}{\eta}\right)^\beta} \quad x > \gamma \quad (2)$$

در جاییکه η, β و γ بترتیب پارامتر شکل، ابعاد و موقعیت می باشند. در مرجع (۳) جزییات توزیع وایبل و انواع مختلف آن ارائه شده است.

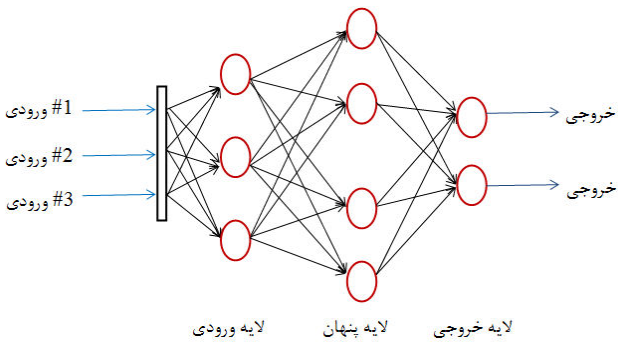
عملکرد مناسب توزیع وایبل در تحلیل ها و کاربردهای مختلف نیازمند داشتن تخمینهای مناسب و دقیق از پارامترهای آن است. از طرفی تخمین پارامترهای مدل وایبل سه پارامتری بسیار مشکل است و همین امر باعث شده است در بسیاری از موارد از یکی از پارامترهای مدل وایبل صرف نظر شود و مدل وایبل با دو پارامتر در نظر گرفته شود که حتی با این وجود، تخمین پارامترهای توزیع وایبل دو پارامتری نیز چندان ساده نیست و نیازمند بکارگیری روشهای عددی است [3]. در مرجع (۴) برای جستجوی پارامترهای مدل وایبل سه پارامتری از روش مونت کارلو و زبان پردازش آرایه ای (APL) در مساله حداقل کردن فاصله در آزمون کلموگروف-اسمیروف استفاده شده است. در مرجع (۵) روش گرافیکی برای تخمین پارامترهای توزیع وایبل سه پارامتری ارائه شده است. مراجع (۶) و (۷) از روش گشتاورها و حل عددی معادلات بدست آمده در تخمین پارامترها استفاده کرده اند. مرجع (۷) از روش حداقل کردن مجموع مربعات بمنظور تخمین پارامترها استفاده کرده است. روش حداکثر درستنمایی یکی از روشهای مناسب برای تخمین پارامترهای توزیع های مختلف است و تخمین-

فرایند یادگیری بر اساس ورودی و خروجی ها به شبکه عصبی آموزش داده می شوند یعنی وزنها و مقادیر آستانه در شبکه عصبی طوری بدست می آید که به ازای ورودیهای مورد نظر در فرایند یادگیری خروجی مورد نظر بدست آید. شبکه های عصبی از کنار هم قرار گرفتن واحدهایی بنام نرون بوجود می آیند. جزییات شبکه های عصبی را می توان در مرجع (۱۴) بطور کامل پیدا کرد.

یکی از انواع مختلف شبکه های عصبی، شبکه عصبی پرسپترون چند لایه است. شبکه عصبی پرسپترون چند لایه در خصوص پیش بینی بیشترین کاربرد را دارد برای درک مفاهیم شبکه های عصبی پرسپترون به مرجع (۱۵) مراجعه کنید.

۲-۱- شبکه های عصبی پرسپترون

شبکه عصبی پرسپترون از متداولترین شبکه های عصبی است [16]. در این شبکه نرون ها در لایه های مختلف بصورتی که تمام نرونهای یک لایه با تمام نرون های لایه قبل و بعد در ارتباط هستند قرار می گیرند. شکل (۱) ساختار یک شبکه عصبی پرسپترون چند لایه را نشان می دهد که در آن یک لایه پنهان وجود دارد. تعداد نرونها در لایه اول و لایه انتها بر اساس ساختار مساله تعریف می شوند اما تعداد نرونها در لایه های پنهان و تعداد لایه های پنهان بصورت تجربی و بر اساس سعی و خطا مشخص می شوند. در بسیاری از منابع استفاده از یک لایه پنهان توصیه می شود [16].



شکل ۱: ساختار شبکه عصبی پرسپترون چند لایه با یک لایه پنهان

۲-۲- آموزش شبکه های عصبی پرسپترون

برای آموزش شبکه عصبی پرسپترون ابتدا نیاز است داده های آموزش لازم تهیه شود. برای آموزش شبکه های عصبی پرسپترون از الگوریتم پس انتشار خطا استفاده می شود. در الگوریتم پس انتشار خطا بر

های بدست آمده از روش حداکثر درستنمایی نارایب و دارای کمترین واریانس می باشند در مرجع (۹) تابع درستنمایی برای توزیع وایبل سه پارامتره محاسبه شده است و معادلات مشتق برای حداکثر کردن تابع درستنمایی بدست آمده است، معادلات بدست آمده سه معادله غیر خط پیچیده می باشند که حل آنها کار ساده ای نیست و حل تحلیلی آنها غیر ممکن است نکته قابل توجه این است که با بیشتر شده تعداد نمونه پیچیدگی معادلات بیشتر می شود و امکان خطا در حل معادلات افزایش می یابد.

در مرجع (۱۰) برای حداکثر سازی تابع درستنمایی توزیع وایبل دو پارامتری از الگوریتم ژنتیک استفاده شده است. در مرجع (۱۱) تابع درستنمایی وایبل سه پارامتری از الگوریتم آنلینگ شبیه سازی شده استفاده شده است. اگرچه روش ارائه شده در مرجع (۱۱) نتایج خوبی ارائه داده است اما تنظیم پارامترهای روش آنلینگ شبیه سازی شده از نقاط مبهم این روش است. دیگر تجزیه و تحلیل ها در خصوص توزیع وایبل سه پارامتری در مراجع (۱۲) و (۱۳) آمده است.

در این مقاله با ایده گرفتن از روش تخمین گشتاورها یک شبکه عصبی پرسپترون چند لایه برای تخمین پارامترهای وایبل سه پارامتری ارائه می شود. در روش ارائه شده ابتدا لازم است میانگین، انحراف معیار، میانه، چولگی و تیزی از نمونه تخمین زده شوند و سپس با استفاده از آنها پارامترهای شکل، ابعاد و موقعیت توزیع وایبل سه پارامتری با شبکه عصبی ارائه شده بدست می آیند.

در این مقاله یک فرمول بسته بر اساس شبکه عصبی طراحی شده ارائه می شود که می توان برای هر نمونه پارامترهای توزیع وایبل سه پارامتری را تخمین زد. بدین ترتیب هر اساس فرمول بسته ارائه شده بدون داشتن هیچ دانشی در خصوص شبکه های عصبی از می توان پارامترهای توزیع وایبل سه پارامتری را تخمین زد.

در بخش بعدی مفاهیم و کلیات شبکه های عصبی ارائه می شود و در بخش سوم کاربرد شبکه های عصبی در تخمین پارامترهای توزیع وایبل سه پارامتری تشریح می شود. در بخش چهارم شبکه عصبی آموزش دیده و وزنها آن ارائه می گردد. بخش پنجم شامل مثالهای عددی حل شده بکمک روش مونت کارلو است. در فصل ششم نتیجه گیری و جمع بندی ارائه می شود.

۲- مفاهیم شبکه های عصبی

شبکه های عصبی بعنوان پردازشگران موازی که قادرند دانش و تجربیات را در خود ذخیره کنند تعریف می شوند [14]. دانش در قالب

یک تا ده و β از یک تا ده و γ از صفر تا یازده در نظر می‌گیریم و از هر کدام ۱۰۰۰۰۰ داده تولید می‌کنیم. برای هر مجموعه داده تولید شده مقادیر میانگین، انحراف معیار، میانه، چولگی و تیزی تخمین زده می‌شود در نتیجه مقادیر تخمینی بعنوان ورودیهای داده‌های آموزش و مقادیر اصلی پارامتر بعنوان خروجی داده‌های آموزش در نظر گرفته می‌شوند. در نتیجه ۱۱۰۰ داده آموزش (زوج ورودی و خروجی) برای آموزش مورد استفاده قرار می‌گیرند.

از آنجا که مقدار پارامتر موقعیت ممکن است عددی بزرگتر از ۱۱ باشد و از طرفی حداقل مشاهدات در نمونه یک تخمین حداقل برای پارامتر موقعیت (γ) است. ما از یک روش تبدیل ساده برای حل مشکل مقادیر بزرگ γ استفاده می‌کنیم بدین ترتیب که ابتدا کلیه داده‌های نمونه را از حداقل آنها (آنرا k می‌نامیم) کم و سپس عدد پنج را به آنها اضافه می‌کنیم بعد از برآورد مقدار γ با کمک شبکه عصبی مقدار بدست آمده را با k جمع و از ۵ کم می‌کنیم.

۳-۳- آموزش

بر اساس ۱۱۰۰ داده آموزش با استفاده از الگوریتم پس انتشار خطا شبکه عصبی طراحی شده آموزش داده می‌شود بعد از ۳۱۲۵ مقدار میانگین مربعات خطا به ۰.۰۰۰۲۳۹۵۱۳ می‌رسد که مقداری قابل قبول است و می‌توان شبکه عصبی را در عمل مورد استفاده قرار داد.

۴- شبکه عصبی آموزش دیده

بعد از فرایند آموزش مقادیر نهایی وزنها و مقادیر آستانه بدست می‌آیند (این مقادیر در پیوست آمده اند). با قرار دادن این مقادیر در معادله (۳) ما به یک تابع مشخص برای تخمین پارامترهای توزیع وایبل سه پارامتری می‌رسیم. که با وارد کردن بردار:

[Median, Mean, Standard deviation, Skewness, Kurtosis]
مقادیر $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma})$ بدست خواهند آمد.

$$\text{Output} = W_3 * \tan \text{sig}(W_2 * \tan \text{sig}(W_1 * [\text{Median, Mean, Standard deviation, Skewness, Kurtosis}] + B_1) + B_2) + B_3 \quad (3)$$

از آنجا که مقادیر خروجی تابع پرلین می‌تواند منفی نیز باشد تعدیل زیر را روی خروجی‌های معادله (۳) اعمال می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= \text{Min}(0, \text{output}(1)) \\ \hat{\beta} &= \text{Min}(0, \text{output}(2)) \\ \hat{\gamma} &= \text{Min}(0, \text{output}(3)) \end{aligned} \quad (4)$$

اساس معادلات برگشتی گرادیان خطا وزنهاى ارتباط هر زوج نرون و مدار آستانه هر نرون طوری تعیین می‌شود که مجموع مربعات خطا برای کل داده‌های آموزش حداقل شود. در الگوریتم پس انتشار خطا با تکرارهای رفت و برگشتی و در یک فراین تکراری مقدار خطا حداقل می‌شود برای شرط توقف در فرایند آموزش معیارهایی در مرجع (۱۴) ارائه شده است.

۳- بکارگیری شبکه عصبی پرسپترون در تخمین پارامترهای توزیع نرمال سه پارامتری

بسیاری از مهندسان و متخصصین آمار با کاربردهای موق شبکه‌های عصبی آشنا هستند. در اینجا ما از شبکه عصبی پرسپترون برای تخمین پارامترهای توزیع وایبل سه پارامتری استفاده می‌کنیم. با الگو گرفتن از روش گشتاورها در تخمین ورودیهای شبکه عصبی را میانگین، انحراف معیار، میانه، چولگی و تیزی در نظر می‌گیریم و خروجی‌های شبکه مورد نظر را پارامترهای توزیع وایبل سه پارامتری در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم شبکه طراحی شده قادر باشد بر اساس پنج آماره‌ای که بعنوان ورودی به آن داده می‌شود و از نمونه تخمین زده شده اند سه پارامتر توزیع وایبل را تخمین بزند. در ادامه مراحل ساختار بندی شبکه عصبی، تهیه داده‌های آموزش و آموزش شبکه عصبی آورده می‌شود.

۳-۱- ساختار شبکه عصبی مورد نظر

شبکه عصبی پرسپترون با یک لایه پنهان در نظر می‌گیریم. از آنجا که تعداد ورودیهای پنج و تعداد خروجی‌های مورد انتظار سه می‌باشد پنج نرون در لایه اول و سه نرون در لایه آخر قرار می‌دهیم. در لایه پنهان نیز ۲۵ نرون قرار می‌دهیم. از آنجا که خروجی‌های شبکه می‌توانند مقادیری بزرگتر از یک بخود بگیرند تابع محرک لایه آخر را تابع پرلین ($\text{Purelin}(n) = n$) و اما تابع محرک نرونهای دیگر را تابع تنسیک ($\text{Tansig}(n) = 2 / (1 + e^{-2n}) - 1$) در نظر می‌گیریم. ساختار شبکه عصبی در نظر گرفته شده در شکل (۲) آمده است.

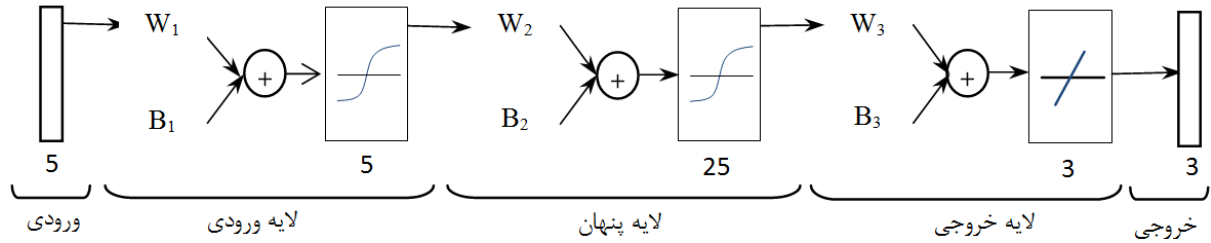
۳-۲- داده‌های آموزش

برای تهیه داده‌های آموزش مورد نیاز بکمک شبیه سازی ۱۰۰۰۰۰ داده تصادفی از توزیع وایبل سه پارامتری با پارامترهای مختلف تولید می‌نماییم. پارامترهای توزیع وایبل سه پارامتری را برای مقدار α از

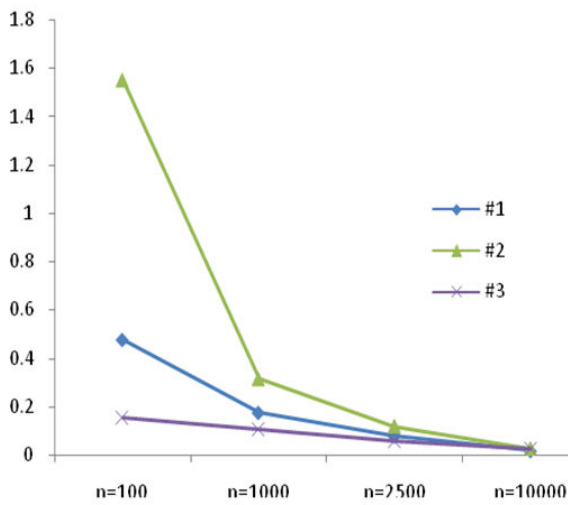
(۱۰۰۰۰) مد نظر قرار می گیرند و هر یک ۱۰۰۰ بار تکرار می شوند میانگین، انحراف تاندارد، میانگین مربعات خطا و فاصله اطمینان ۹۵٪ برای مقادیر تخمین زده در جدول (۱) ارائه شده است.

۵- مثالهای حل شده بروش مونت کارلو

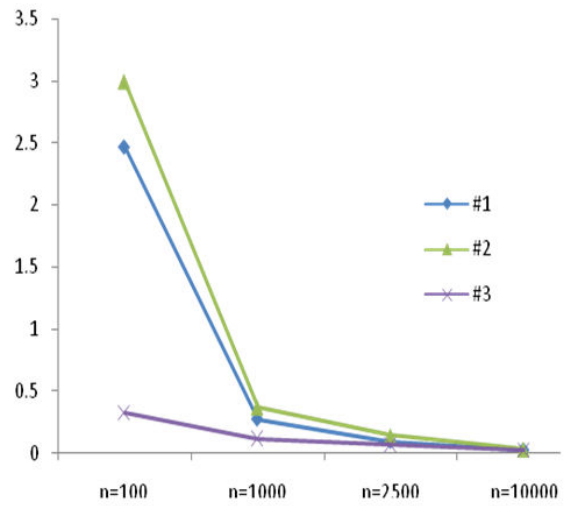
در این بخش برای بررسی عملکرد شبکه عصبی طراحی شده سه مثال با در نظر گرفتن اندازه نمونه های مختلف (۱۰۰، ۱۰۰۰، ۲۵۰۰ و



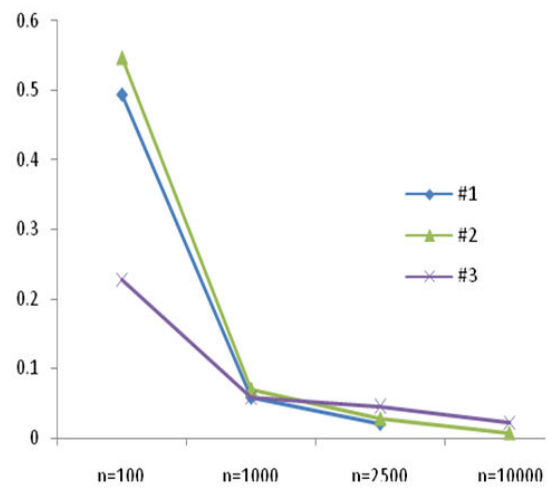
شکل ۲: ساختار شبکه عصبی طراحی شده



شکل ۵: میانگین $|\hat{\gamma} - \gamma|$ برای اندازه نمونه های مختلف



شکل ۳: میانگین $|\hat{\alpha} - \alpha|$ برای اندازه نمونه های مختلف



شکل ۴: میانگین $|\hat{\beta} - \beta|$ برای اندازه نمونه های مختلف

نتایج شبیه سازی برای مقادیر مختلف توزیع وایبل با پارامترهای مختلف در ۱۰۰۰۰ تکرار

#	پارامترها	اندازه نمونه	پارامترهای تخمینی	میانگین	انحراف معیار	میانگین مربعات خطا	فاصله اطمینان ۹۵ درصدی
1	$\alpha = 2$ $\beta = 2$ $\gamma = 1$	100	$\hat{\alpha}$	4.4669	5.5722	37.1323	4.3577 4.5761
			$\hat{\beta}$	2.4940	0.7324	0.7803	2.4796 2.5083
			$\hat{\gamma}$	0.5258	0.3783	0.3679	0.5184 0.5333
		1000	$\hat{\alpha}$	2.2736	0.6984	0.5626	2.2599 2.2873
			$\hat{\beta}$	2.0589	0.1088	0.0153	2.0567 2.0610
			$\hat{\gamma}$	0.8253	0.2593	0.0977	0.8202 0.8304
		2500	$\hat{\alpha}$	2.0948	0.1766	0.0402	2.0913 2.0982
			$\hat{\beta}$	2.0212	0.0505	0.0030	2.0202 2.0222
			$\hat{\gamma}$	0.9219	0.1384	0.0253	0.9192 0.9246
		10000	$\hat{\alpha}$	2.0231	0.0395	0.0021	2.0223 2.0238
			$\hat{\beta}$	2.0048	0.0244	0.0006	2.0044 2.0053
			$\hat{\gamma}$	0.9823	0.0354	0.0016	0.9816 0.9830
2	$\alpha = 6.5$ $\beta = 2$ $\gamma = 5.8$	100	$\hat{\alpha}$	9.4960	5.7081	41.5554	9.3841 9.6079
			$\hat{\beta}$	2.5461	0.8880	1.0867	2.5286 2.5635
			$\hat{\gamma}$	4.2491	1.9231	6.1031	4.2114 4.2868
		1000	$\hat{\alpha}$	6.8700	0.7808	0.7465	6.8547 6.8853
			$\hat{\beta}$	2.0703	0.1168	0.0186	2.0680 2.0726
			$\hat{\gamma}$	5.4861	0.6228	0.4864	5.4738 5.4983
		2500	$\hat{\alpha}$	6.6394	0.2520	0.0829	6.6345 6.6444
			$\hat{\beta}$	2.0280	0.0421	0.0026	2.0272 2.0288
			$\hat{\gamma}$	5.6813	0.2175	0.0614	5.6770 5.6855
		10000	$\hat{\alpha}$	6.5307	0.0667	0.0054	6.5294 6.5320
			$\hat{\beta}$	2.0073	0.0132	0.0002	2.0070 2.0075
			$\hat{\gamma}$	5.7743	0.0554	0.0037	5.7732 5.7753
3	$\alpha = 3$ $\beta = 4.9$ $\gamma = 35$	100	$\hat{\alpha}$	3.3233	4.2740	18.3698	3.2395 3.4071
			$\hat{\beta}$	5.1270	2.2041	4.9092	5.0838 5.1702
			$\hat{\gamma}$	35.1553	1.8381	3.3813	35.1193 35.1914
		1000	$\hat{\alpha}$	2.8833	0.3286	0.1216	2.8769 2.8898
			$\hat{\beta}$	4.8419	0.4769	0.2308	4.8325 4.8512
			$\hat{\gamma}$	35.1074	0.3212	0.1147	35.1011 35.1137
		2500	$\hat{\alpha}$	2.9322	0.2097	0.0486	2.9281 2.9363
			$\hat{\beta}$	4.8542	0.2715	0.0758	4.8489 4.8595
			$\hat{\gamma}$	35.0597	0.2040	0.0452	35.0557 35.0637
		10000	$\hat{\alpha}$	3.0230	0.0685	0.0052	3.0217 3.0244
			$\hat{\beta}$	4.9224	0.1068	0.0119	4.9203 4.9245
			$\hat{\gamma}$	34.9732	0.0646	0.0049	34.9719 34.9745

- [8] Bain, L.J., Antle, C.E., Technometrics (1967) , 9, 621-627.
- [9] Dubey, S.D., Technometrics (1965) 7, 423-434.
- [10] Thomas, G., Gerth, R., Velasco, T., Rabelo, L., Computer and Industrial Engineering, (1995), 29, 377-382.
- [11] Abbasi B., Eshragh Jahromi, A.H., Arkat J., Hosseinkouchack M., Applied Mathematics and Computation, (2006) , 183(1): 85-93.
- [12] Zhang TL, Xie M, Communications in Statistics-Simulation and Computation, (2007) , 36 (3), 579-592.
- [13] Tang, Y., Xie, M., Goh, T. N. Communications in Statistics: Theory&Methods,(2003),32(5):913-928.
- [14] Haykin, S. Macmillan Publishing, New York 1994.
- [15] Rumelhart, D. E., McClelland, J. L., & PDP Research Group, MA. Cambridge: MIT Press 1986.
- [16] Bishop, C., Oxford University Press, U.K 1995.

جدول (۱) نشان می دهد نتایج بدست آمده برای تخمین پارامترها بکمک شبکه های عصبی خوب و نزدیک به مقادیر اصلی می باشد. شکل (۱) تا (۳) مقادیر میانگین تخمینها در جدول (۱) را نشان می دهد. از شکلهای (۱) تا (۳) می توان نتیجه گرفت که در روش ارائه شده با افزایش اندازه نمونه دقت تخمینها افزایش میابد.

۶- نتیجه گیری

در این مقاله یک شبکه عصبی پرسپترون برای تخمین پارامترهای توزیع وایبل سه پارامتری ارائه شده است. شبکه عصبی طراحی شده در این مقاله قادر است پارامترهای توزیع وایبل سه پارامتری را بر مبنای میانگین، انحراف معیار، میانه، چولگی و تیزی تخمین بزند. در این مقاله بر اساس استخراج وزنها و مقادیر آستانه شبکه عصبی یک فرمول بسته برای تخمین پارامترهای توزیع وایبل سه پارامتری ارائه شده است که در نتیجه هر فردی بدون نیاز به داشتن اطلاعات و دانش درمورد شبکه های عصبی می تواند براحتی با استفاده از فرمول بسته ارائه شده پارامترها را تخمین بزند. از آنجاکه مقادیر اعشاری در وزنها بدست آمده بسیار زیاد است توصیه می شود در بکار گیری رابطه ارائه شده از نرم افزارهایی که دقت محاسباتی بالایی دارند (مانند نرم افزار مطلب) استفاده شود. نتایج شبیه سازی های انجام شده در این مقاله بر عملکرد مناسب بکارگیری شبکه عصبی طراحی شده در تخمین پارامترها صحه می گذارد. بکارگیری شبکه های عصبی در تخمین پارامترهای دیگر توزیع های مهم مانند توزیع پیرسون که تخمین پارامترهای آنها از روشهای معمول مشکل است بعنوان موضوعات تحقیقات آتی توصیه می گردد.

۷- مراجع

- [1] Nosal, M., Legge, A.H., Krupa, S.V., Environmental Pollution, (2000), 108, 439-446.
- [2] Johnson, N.L., Kotz, S., Continuous Univariate Distributions. John Wiley & Sons, New York 1970.
- [3] Murthy, D. N. P., Xie, M., Jiang, R. 2003. New York: John Wiley & Sons.
- [4] Nosal M., Nosal E.M., Proceedings of the Hawaii, International Conference on Statistics and Related Fields in Honolulu, Hawaii (2003).
- [5] Ross R., Proc. Int. Conf. Prop. Appl. Diel. Mater. (1994) 1, 250-253, Brisbane, Australia .
- [6] Lehman, E.H... Transactions of IEEE-Reliability (1962) 11, 32-38.
- [7] White J.S., , Technometrics, (1969) 11, 374-386.

پیوست ۱

وزنهای و مقادیر آستانه شبکه آموزش دیده

$$W_1 = \begin{bmatrix} 0.0058691 & -0.0056296 & -0.002969 & -0.6099 & -0.00031564 \\ 0.00091901 & -0.0038312 & 0.00070265 & -0.0077393 & 0.00018073 \\ -0.029719 & 0.027419 & 0.021395 & 10.076 & 0.0044713 \\ -0.0045857 & 0.0043779 & -0.0093714 & 0.44115 & -5.017e-005 \\ -12.622 & 12.643 & 1.7875 & -40.949 & 20.769 \end{bmatrix}$$

$$W_2^T = \begin{bmatrix} 5.9103 & 27.427 & 1.5359 & -11.11 & -17.795 & -0.70194 & 2.3235 & 8.4265 & -2.0759 & 6.3824 & 5.9412 & 9.2542 & 16.039 & -3.7355 & 8.1299 \\ -0.1802 & 0.76954 & 0.040747 & 0.86671 & 0.63541 & 1.6501 & -33513e-8 & -0.26967 & 10.069 & -0.3763 & 0.11341 & 0.61601 & 14.622 & -0.32068 & 6.7315 \\ -0.22113 & 4.8482 & 4.382 & 5.2712 & -6.4315 & 9.376 & -7.0281 & 5.7084 & 0.24556 & 0.38164 & 8.384 & 2.6388 & 33.969 & 0.13221 & 16.681 \\ 10.713 & -4.7731 & -2.8674 & -26.695 & -19.201 & -11.098 & 2.1813 & 4.8145 & -2.7581 & 3.8059 & -0.83773 & -8.0935 & -21.729 & -4.3068 & 5.7657 \\ -0.60011 & -10.819 & 0.80942 & 0.082503 & -1.6529 & 35.816 & -0.04937 & -1.9894 & 37048e-6 & 0.13076 & -2.5365 & -0.070659 & -16.324 & 78441e-7 & -22.68 \\ -3.5636 & 1.8347 & -26.451 & 45.467 & -13.363 & -34.727 & 1.6894 & 4.5108 & 17.4 & -5.582 & 0.12835 & -1.2833 & 0.38259 & 2.1228 & -0.70874 & -1.2716 & -8.112 & -0.051381 & 1.4362 & -0.53469 \\ 0.1914 & 0.12751 & -6.1811 & 5.0262 & -57.569 & -6.0566 & -0.21176 & 1.7871 & 5.3702 & -0.10446 & -4.977 & 1.382 & -9.005 & -4.9117 & 3.5405 & 9.0094 & 2.2718 & 6.4788 & -21.879 & 7.4656 \\ 0.020915 & 0.012681 & -2.3382 & -0.2616 & -6.6999 & -30.662 & -0.032234 & 0.20933 & 8.0697 & -0.011791 \end{bmatrix}$$

$$W_3 = \begin{bmatrix} -14.64 & -8.508 & 9.2634 & 3.8314 & -3.084 & -7.5041 & -33.847 & 1.5121 & -1.7934 & -22.247 & -24.108 & 18.519 & -6.5179 & 34.286 & 11.735 \\ -10.574 & -7.3036 & 5.3543 & 0.020982 & 0.1678 & -1.0171 & -0.029576 & -3.3087 & -1.4107 & 0.38861 & 0.31715 & 6.6327 & -8.6003 & -10.881 & 12.742 \\ 5.2743 & 7.7245 & -9.3697 & -3.5742 & 3.1155 & 7.2461 & 32.458 & -1.5641 & -22.361 & 27.148 & 23.093 & -18.722 & 6.3627 & -7.992 & -11.427 \\ 16.717 & -25.53 & 18.98 & -12.381 & 13.618 & -13.382 & 2.927 & -23.799 & -3.6441 & -40.432 \\ -6.5686 & -13.927 & 2.5152 & -2.4751 & 4.7489 & -5.8308 & 1.7995 & -1.7961 & -1.555 & -2.6638 \\ 9.1623 & 34.889 & -16.094 & 12.356 & -13.513 & 12.972 & 30.746 & 24.589 & 3.6459 & 40.169 \end{bmatrix}$$

$$B_1^T = [-0.35162 \quad 0.24536 \quad 5.3876 \quad 0.40101 \quad -100.21]$$

$$B_3^T = [11.814 \quad -3.2726 \quad -2.9015]$$

$$B_2^T = [-4.5506 \quad -10.511 \quad -1.5963 \quad 7.3489 \quad 3.7295 \quad 39.621 \quad -2.8307 \quad -6.7348 \quad -2.5963 \quad -0.45199 \quad 0.69639 \quad 1.9691 \quad 7.0568 \quad 0.9816 \quad -11.622 \\ -0.017091 \quad 0.48973 \quad -9.8648 \quad 2.5036 \quad 47.18 \quad -31.739 \quad 0.8933 \quad -1.7833 \quad 14.326 \quad -0.55212]$$